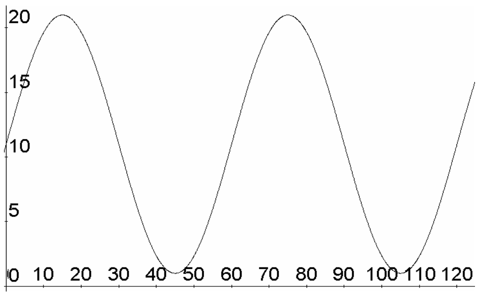
De Wageningse Methode
5&6 VWO wiskunde B
Uitgebreidere antwoorden Hoofdstuk 4
Goniometrie

Paragraaf 1 Cirkelbewegingen

1 **a.** De hoogte van het wiel is de y-coördinaat van het hoogste punt van de grafiek, dus 80 cm
b. De periode is de omtrek van het wiel $= 80\pi \approx 251{,}3$ cm
c. In één omwenteling van het wiel wordt $0{,}80\pi$ meter afgelegd; 36 km/u komt overeen met 10 m/sec, dus $0{,}08\pi \approx 0{,}25$ s.

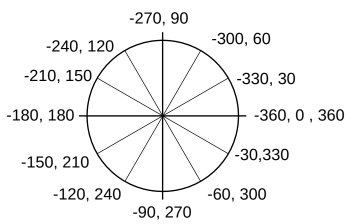
2 **a.** Dan is het rad helemaal beneden, dus na $\frac{3}{4}$ rondje en $1\frac{3}{4}$ rondje, dus na 45 en 105 sec.
b. 11m; vanaf het begin elk half rondje verder, dus na 0, 30, 60, 90, 120 sec.
c.



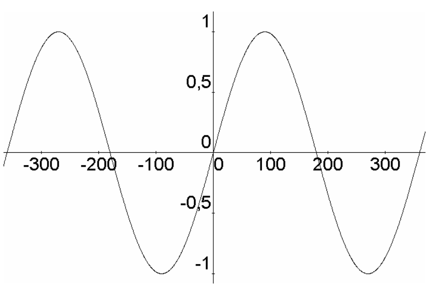
d. $\alpha = \frac{1}{6} \cdot 360° = 60°$;
$H(10) = 11 + 10 \cdot \sin 60° \approx 19{,}660$
e. $H(35) = 11 - 10 \cdot \sin 30° = 6$
f. 6°
g. Omtrek rad $= 20\pi$ meter, die afstand wordt in 60 sec afgelegd, $20\pi/60 = \frac{1}{3}\pi$ m/s.

3 **a.** 3
b. $f(100) = f(1) = 2$; $f(-100) = f(2) \approx \frac{1}{2}$

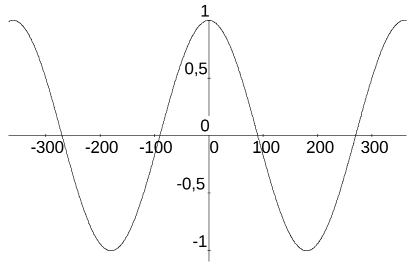
4 **a.**



b. Vanaf $t = 0$ tegen de klok in is de hoogte van de verdeelstrepen:
0, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}\sqrt{3}$, 1, $\frac{1}{2}\sqrt{3}$, $\frac{1}{2}$, 0, -$\frac{1}{2}$, -$\frac{1}{2}\sqrt{3}$, -1, -$\frac{1}{2}\sqrt{3}$, -$\frac{1}{2}$, 0.
c.



f. Vanaf $t = 0$ tegen de klok in is de breedte van de verdeelstrepen:
1, $\frac{1}{2}\sqrt{3}$, $\frac{1}{2}$, 0, -$\frac{1}{2}$, -$\frac{1}{2}\sqrt{3}$, -1, -$\frac{1}{2}\sqrt{3}$, -$\frac{1}{2}$, 0, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}\sqrt{3}$, 1.
g.



5 **a.** $\frac{1}{6}\pi$ m/s; 3 keer zo snel, dus $\frac{1}{2}\pi$ m/s; het kogeltje gaat in 12 sec rond, als de straal r is, dan wordt dus $2\pi r$ afgelegd in 12 seconden, $\frac{1}{6}\pi r$ m/sec, dus $\frac{1}{6}\pi r = 2\pi$, dus $r = 12$.
b. Het kogeltje is rond na 2π meter afgelegd te hebben, dat duurt $2\pi/6 = \frac{1}{3}\pi$ sec, dus 360° in $\frac{1}{3}\pi$ sec, dat is $360/\frac{1}{3}\pi = \frac{1080}{\pi}$ °/s

6 Een rondje wordt in 2 seconden afgelegd. Als er 120 km/u wordt afgelegd is dat $120\,000/1800 = 66\frac{2}{3}$ m. De straal is $66\frac{2}{3}/2\pi \approx 10{,}61$ m

7 **a.** 2π s
b. Een hoek van 60°, want daarbij is de koorde gelijk aan de straal.
c. 1; r

8

0	30	45	60	90	120	135	150	180
0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π

9 **a.** 2π s
b. 1 eenheid/s
c. Zo is het gedefinieerd
d. De eenheden op de horizontale as.
e. 2π

10 **a.** Ten opzichte van de y-as (dus horizontaal) met factor 2 uitgerekt. Formule is: $y = \sin \frac{1}{2}x$.
b. Ten opzichte van de x-as (dus verticaal) met factor $\frac{1}{2}$ ingekrompen. Formule is: $y = \frac{1}{2}\sin x$

12 **a.** In 5 stappen wordt cirkel 2 keer doorlopen, dus $T_{step} = \frac{4\pi}{5}$; $T_{max} = 4\pi$
b. De exacte coördinaten zijn:
$(\cos(k \cdot \frac{4\pi}{5}), \sin(k \cdot \frac{4\pi}{5}))$, met $k = 1, 2, 3, 4, 5$.
Dit geeft de punten: (0,309 ; 0,951); (-0,809 ; 0,588); (-0,809 ; -0,588), (0,309 ; -0,951); (1, 0)

13 **a.** $x(t) = \cos(-t)$; $y(t) = \sin(-t)$
c. Spiegelen in de horizontale as.

14 a. $x(t) = 2\cos t$; $y(t) = 2\sin t$

c. Ten opzichte van de x-as (=verticaal) vermenigvuldigen met factor 2.

15 a. Eenheidscirkel.

b. 3 keer zo snel, dus 3 rad/s

c. (1, 0)

d. Ten opzichte van de y-as (dus horizontaal) vermenigvuldigen met factor $\frac{1}{3}$.

16 a. $\begin{cases} x = \cos(t-1) \\ y = \sin(t-1) \end{cases}$

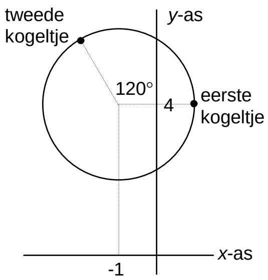
c. Eén eenheid naar rechts schuiven.

17 a. $\begin{cases} x = 2+\cos t \\ y = 3+\sin t \end{cases}$

c. Drie eenheden omhoog schuiven.

18 a. Beide middelpunt (-1,4), straal 2 en hoeksnelheid
3 eenheden/s.

b.



19 a. 0, 0, $\frac{1}{2}\pi$, $\frac{1}{4}\pi$, $\frac{1}{2}\pi$

b. $(2\cos t\,,\, 2\sin t)$

$(1 + 5\cos 2t\,,\, 2 + 5\sin 2t)$

$(\cos(-\pi t + \frac{1}{2}\pi)\,,\, -1 + \sin(-\pi t + \frac{1}{2}\pi))$

$(\cos(t + \frac{1}{4}\pi)\,,\, \sin(t + \frac{1}{4}\pi))$

$(3 + 2\cos(-3t + \frac{1}{2}\pi)\,,\, 1 + 2\sin(-3t + \frac{1}{2}\pi))$

20 a. (b, a)

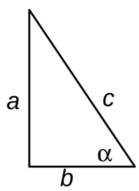
b. (0 , 1); –; 1 rad/s.

c. $\omega = -1$; $r = 1$; $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, $a = b = 0$

21 De andere niet rechte hoek in de driehoek is $90° - \alpha$.

$\sin\alpha = \frac{a}{c}$ en ook $\cos(90° - \alpha) = \frac{a}{c}$.

$\cos\alpha = \frac{b}{c}$ en ook $\sin(90° - \alpha) = \frac{b}{c}$.



22 $\omega = -\dfrac{2\pi}{60} = -\frac{1}{30}\pi$, $\varphi = \frac{1}{2}\pi$

$\begin{cases} x = 2\cos(-\frac{1}{30}\pi t + \frac{1}{2}\pi) \\ y = 2\sin(-\frac{1}{30}\pi t + \frac{1}{2}\pi) \end{cases}$

23 a. Eenheidscirkel wordt met factor 2 verticaal uitgerekt, je krijgt een ellips met centrum (0, 0), horizontale as van lengte 2 en verticale as van lengte 4.

b. Voor alle punten die je krijgt zijn de coördinaten gelijk, dus je krijgt punten op de lijn $y = x$, maar niet allemaal, want de cosinus kan alleeen waarden tussen -1 en 1 aannemen, dus je krijgt lijnstuk met eindpunten (-2, -2) en (2, 2).

Paragraaf 2 Parametriseren

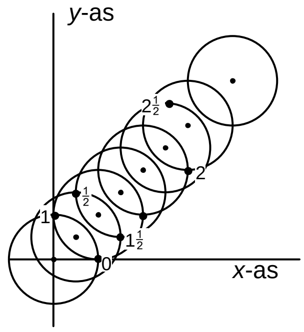
1 a. $2\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{2}$, 2

b. $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 + \frac{1}{2}\sin t \end{cases}$

c. De baan is de lijn met vergelijking $y = \frac{1}{2}x + 2$.

d. Zie **e.**

2 a. De baan is de lijn met vergelijking $y = x$.



3 P: $\begin{cases} x = \sin t \\ y = \cos t \end{cases}$

Q: $\begin{cases} x = 2 + \cos(t + \frac{1}{4}\pi) \\ y = \sin(t + \frac{1}{4}\pi) \end{cases}$

R: $\begin{cases} x = \cos(t + 1\frac{1}{6}\pi) \\ y = 2 + \sin(t + 1\frac{1}{6}\pi) \end{cases}$

4 a. $\begin{cases} x = 4\cos(-4\pi t) \\ y = 5 + 4\sin(-4\pi t) \end{cases}$

b. $\begin{cases} x = 4\cos(-4\pi t) \\ y = 4\frac{1}{2} + 4\sin(-4\pi t) \end{cases}$

Cirkel met middelpunt $(0, 4\frac{1}{2})$ en straal 4.

5 a. De omtrek van het wiel is 72π, dus een keer rond duurt $72\pi/6 = 12\pi$ sec

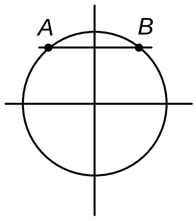
b. $\begin{cases} x = 6t \\ y = 36 \end{cases}$

c. $\begin{cases} x = 6t + 36\sin\frac{1}{6}t \\ y = 36 + 36\cos\frac{1}{6}t \end{cases}$

e. De periode van de beweging is 12π. Voor de eerste keer op de x-as halverwege de eerste periode, dus als $t = 6\pi$; verder: 18π, 30π, ...
Bovenin: $t = 0$, 12π, 24π,...

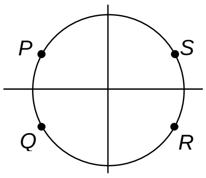
6 Bij de spiraal in de tekening is $r = t$.

Paragraaf 3 Eigenschappen van sinus en co



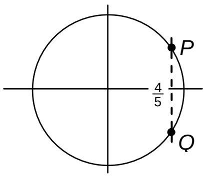
1 **a.** Zie plaatje: de lengte van de boog tussen A en B is $\frac{1}{4}\pi$, dus van A naar het 'hoogste' punt $\frac{1}{8}\pi$.
$t = \frac{3}{8}\pi$, $1\frac{3}{8}\pi$
b. $\frac{7}{8}\pi$, $1\frac{7}{8}\pi$

2 $\frac{7}{8}\pi + k\cdot 2\pi$; $1\frac{7}{8}\pi + k\cdot 2\pi$, met k geheel.



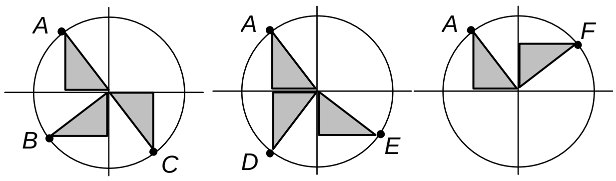
3 **a.** (3) en (4) volgen uit de puntsymmetrie tov O.
(5) en (6) volgen uit symmetrie tov de y-as.

4 **a.** 1, rechthoekige driehoek met rechthoekszijden $|\sin t|$, $|\cos t|$ en schuine zijde 1.



5 **a.**
b. $\sin^2 t + (\frac{4}{5})^2 = 1 \Leftrightarrow \sin t = \frac{3}{5}$ of $\sin t = -\frac{3}{5}$
c. $\cos(t + \pi) = -\frac{4}{5}$ (spiegelen in O);
$\sin(t - \frac{1}{2}\pi) = -\frac{4}{5}$ (een kwartslag met de klok mee draaien)

6



Je kunt het met plaatjes doen: als $A(\cos t, \sin t)$, dan: $B = (\cos(t + \frac{1}{2}\pi), \sin(t + \frac{1}{2}\pi))$,
$C = (\cos(t + 3\pi), \sin(t + 3\pi))$, $D = (\cos(-t), \sin(-t))$ (hulppunt), $E = (\cos(-t + 2\frac{1}{2}\pi), \sin(-t + 2\frac{1}{2}\pi))$ en $F(\cos(t + 1\frac{1}{2}\pi), \sin(t + 1\frac{1}{2}\pi))$, dus
$\cos(t + \frac{1}{2}\pi) = -\sin t$ (punt B), $\sin(t + 3\pi) = -\sin t$ (punt C), $\cos(-t + 2\frac{1}{2}\pi) = \sin t$ (punt E) en $\sin(t + 1\frac{1}{2}\pi) = -\cos t$ (punt F).
Je kunt ook de formules gebruiken, bijvoorbeeld:
$\cos(t + \frac{1}{2}\pi) =$ < volgens **8** > $= \sin(-t) =$ < volgens **1** > $= -\sin t$, enzovoort.

7 **b.** $\sin(x + \pi) = -\sin x$ en $\sin(x + 1\frac{1}{2}\pi) = -\sin(x + \frac{1}{2}\pi)$, dus
$\sin x + \sin(x + \frac{1}{2}\pi) + \sin(x + \pi) + \sin(x + 1\frac{1}{2}\pi) = 0$, voor elke x.

8 $\sin^2 2x + \cos^2 2x = 1$ volgens **(9)** als je voor $t = 2x$ invult.
$(2\sin x)^2 + (2\cos x)^2 = 4\sin^2 x + 4\cos^2 x = 4$ volgens **(9)**.

9 $\sin(x + \frac{1}{2}\pi) = \cos x$, $\sin(x + \pi) = -\sin x$ en $\sin(x + 1\frac{1}{2}\pi) = -\cos x$, dus $\sin^2 x + \sin^2(x + \frac{1}{2}\pi) + \sin^2(x + \pi) + \sin^2(x + 1\frac{1}{2}\pi)$
$= \sin^2 x + \cos^2 x + (-\sin x)^2 + (-\cos x)^2 = 1 + 1 = 2$.

10 $(1 + \cos x)(1 - \cos x) = 1 - \cos^2 x = \sin^2 x$, volgens **(9)**.

11 **a.** Uit **(1)** volgt $\sin(3t - 1) = -\sin(-3t + 1)$.
b. Als je voor $t = 0$ neemt, krijg je $\cos(-1) + \cos 1 = 2\cos 1 \neq 0$, dus voor $t = 0$ klopt de formule niet. Als bijvoorbeeld $3t - 1 = \frac{1}{2}\pi$, dus $t = \frac{1}{6}\pi + \frac{1}{3}$, krijg je $\cos\frac{1}{2}\pi + \cos -\frac{1}{2}\pi = 0 + 0 = 0$.

12 $\cos(x + \frac{1}{3}\pi) =$ < volgens (**7**) > $= \sin(\frac{1}{2}\pi - (x + \frac{1}{3}\pi)) =$
$\sin(\frac{1}{6}\pi - x) =$ < volgens (**1**)) > $= -\sin(x - \frac{1}{6}\pi)$

13 $\sin^2 \frac{5}{14}\pi = \cos^2 \frac{2}{14}\pi$ en $\sin^2 \frac{4}{14}\pi = \cos^2 \frac{3}{14}\pi$, dus
$\sin^2 \frac{2}{14}\pi + \sin^2 \frac{3}{14}\pi + \sin^2 \frac{4}{14}\pi + \sin^2 \frac{5}{14}\pi =$
$\sin^2 \frac{2}{14}\pi + \cos^2 \frac{2}{14}\pi + \sin^2 \frac{3}{14}\pi + \cos^2 \frac{3}{14}\pi = 2$

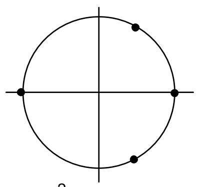
14 **b.** $p = -1$
c. Volgt uit **(9)**.

15 2ndsin .7 ≈ 0.775, dus 0,775 en $\pi - 0{,}775 \approx 2{,}366$
2ndsin -.3 ≈ -0.304…,dus $\pi + 0{,}304\ldots \approx 3{,}446$ en $2\pi - 0{,}304.. \approx 5{,}978$
geen oplossing
$1\frac{1}{2}\pi \approx 4{,}712$

16 $2\pi + 0{,}411\ldots \approx 6{,}695$; $4\pi - 0{,}411 \approx 9{,}013$
$-6\pi + 0{,}411\ldots \approx -18{,}438$; $-5\pi - 0{,}411\ldots \approx -16{,}119$

17 2ndcos .07 ≈ 0.795, dus 0,795 en $2\pi - 0{,}795 \approx 5{,}488$
2ndcos -.3 ≈ 1.875, dus 1,875 en $2\pi - 1{,}875 \approx 4{,}408$
geen oplossing
$\pi \approx 3{,}142$

18 **a.**



b. 0, $\frac{1}{3}\pi$, π, $1\frac{2}{3}\pi$

19 **a.** π, $\frac{2}{3}\pi$
b. $\sin 2\cdot\frac{1}{5}\pi = \sin 3\cdot\frac{1}{5}\pi$, volgens **(5)**.
c. $\frac{2}{5}\pi$
d. $0, \frac{1}{5}\pi, \frac{3}{5}\pi, \pi, 1\frac{2}{5}\pi$, controleren zoals in **b**

20 **a.** 2π, π

b. Dan $\sin x = 0$ of $\sin x = 1$, (vergelijk: $a^2 = a \Leftrightarrow a^2 - a = 0 \Leftrightarrow a(a-1) = 0 \Leftrightarrow a = 0$ of $a = 1$), dus $x = 0, \pi, 2\pi, \frac{1}{2}\pi$.

21 a. $2\pi, \pi$
b. Dan $\sin x = 0$ of $\sin x = \frac{1}{2}$, dus $x = 0, \pi, 2\pi, \frac{1}{6}\pi, \frac{5}{6}\pi$.

22 a. $2\pi, \pi$
b. $3\sin x = 2 - 2\sin^2 x \Leftrightarrow 2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0 \Leftrightarrow \sin x = -2$ of $\sin x = \frac{1}{2}$ (vergelijk: $2a^2 + 3a - 2 = 0 \Leftrightarrow (2a-1)(a+2) = 0 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$ of $a = -2) \Leftrightarrow x = \frac{1}{6}\pi, \frac{5}{6}\pi$

Paragraaf 4 De somformules

1 Nee.

2 **b.** $(\frac{1}{4}\pi, \sqrt{2})$

3 **a.** $(\frac{1}{2}\pi, 2)$; π

4 $(2, 3), (-3, 6)$

5 $1; \sqrt{3}$

6 **a.** $\vec{q} = (\cos(\frac{1}{2}\pi + \beta), \sin(\frac{1}{2}\pi + \beta))$;
$\vec{v} = (\cos(\alpha + \beta), \sin(\alpha + \beta))$
b. Volgt uit **(10)** en **(11)**.
c. $(\cos(\alpha + \beta), \sin(\alpha + \beta)) =$
$\cos\alpha \cdot (\cos\beta, \sin\beta) + \sin\alpha \cdot (-\sin\beta, \cos\beta) =$
$(\cos\alpha \cdot \cos\beta, \cos\alpha \cdot \sin\beta) + (\sin\alpha \cdot -\sin\beta, \sin\alpha \cdot \cos\beta) =$
$(\cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta, \cos\alpha \cdot \sin\beta + \sin\alpha \cdot \cos\beta)$

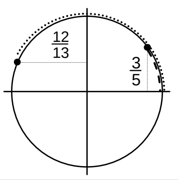
7 **a.** $\sin(x + \frac{1}{4}\pi) = \sin x \cdot \cos\frac{1}{4}\pi + \cos x \cdot \sin\frac{1}{4}\pi = \frac{1}{2}\sqrt{2}\, \sin x + \frac{1}{2}\sqrt{2}\, \cos x$
b. Vermenigvuldig beide kanten uit **a** met $\sqrt{2}$.

8 Substitueer $-\beta$ voor β in **(12)**. Dan krijg je:
$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos -\beta - \sin\alpha \cdot \sin -\beta =$
$\cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta$, vanwege **(1)** en **(2)**.

Substitueer $-\beta$ voor β in **(13)**. Dan krijg je:
$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cdot \cos -\beta + \cos\alpha \cdot \sin -\beta =$
$\sin\alpha \cdot \cos\beta + -\cos\alpha \cdot \sin\beta$, vanwege **(1)** en **(2)**.

9 Als je π voor β substitueert in **(13)**, dan krijg je **(3)**.
Als je π voor β substitueert in **(14)**, dan krijg je **(4)**.
Als je $\frac{1}{2}\pi$ voor α en α voor β substitueert in **(15)**, krijg je **(7)**.
Als je $\frac{1}{2}\pi$ voor α en α voor β substitueert in **(14)**, krijg je **(8)**.
Als je α voor β substitueert in **(14)**, krijg je **(9)**.

10 a.



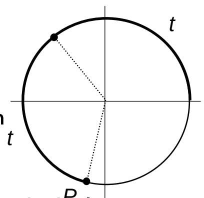
b. $\cos\alpha = \sqrt{1 - (\frac{3}{5})^2} = \frac{4}{5}$; $\sin\beta = \sqrt{1 - (\frac{12}{13})^2} = \frac{5}{13}$
c. $\sin(\alpha + \beta) = \frac{3}{5} \cdot -\frac{12}{13} + \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{13} = -\frac{16}{65}$
$\cos(\alpha - \beta) = \frac{4}{5} \cdot -\frac{12}{13} + \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{13} = -\frac{33}{65}$

11 a. Vul x in voor α en voor β in **(13)**, dan krijg je **(16)**.
Vul x in voor α en voor β in **(12)**, dan krijg je **(17)**.
b. $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x =$
$\cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = 2\cos^2 x + 1$;
$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = (1 - \sin^2 x) - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x$

12 a. $2\sin^2 x = 1 - \cos 2x =$
$1 - \sin(\frac{1}{2}\pi - 2x) = 1 + \sin(2x - \frac{1}{2}\pi)$, dus bijvoorbeeld $a = 1$, $b = -1$, $c = -2$, $d = \frac{1}{2}\pi$ of $a = 1$, $b = 1$, $c = 2$ en $d = -\frac{1}{2}\pi$ $(+ k \cdot 2\pi)$.
b. $2\cos^2 x = 1 + \cos 2x = 1 + \sin(\frac{1}{2}\pi - 2x)$, dus $a = 1$, $b = 1$, $c = -2$ en $d = \frac{1}{2}\pi$ $(+ k \cdot 2\pi)$.
Er zijn weer meer mogelijkheden.

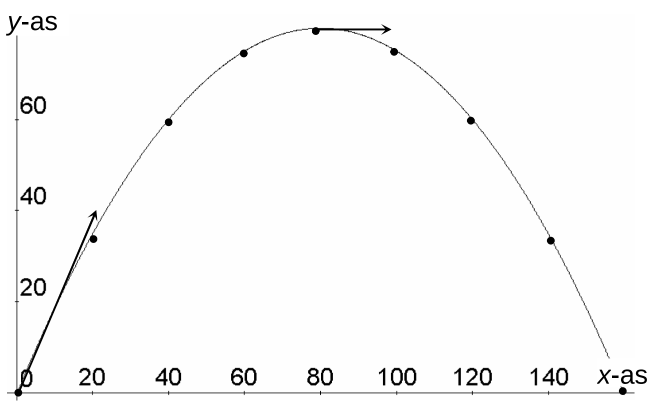
13 $(\sin x + \cos x)^2 = \sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cdot \cos x = 1 + \sin 2x$, volgens **(9)** en **(16)**.

14 a. $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$, dus $\cos t = -0{,}6$
b. De positie is P.
c. $x_P = \cos 2t = 1 - 2\sin^2 t = -0{,}28$ en
$y_P = \sin 2t = 2\sin t \cdot \cos t = -0{,}96$.



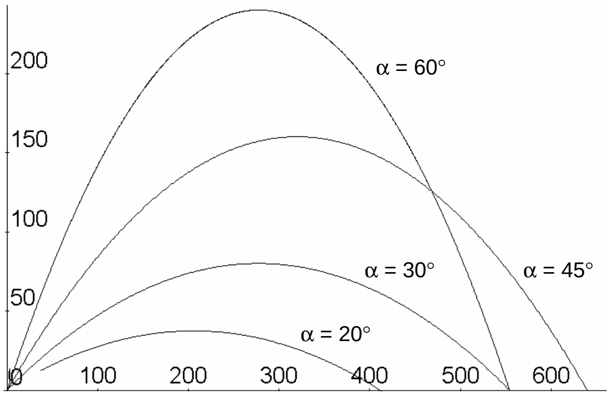
15 a. $\cos\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ en $\cos\beta = \frac{2}{3}\sqrt{2}$, met behulp van $\cos^2 \ldots + \sin^2 \ldots = 1$
b. $\sin\gamma = \sin(\pi - (\alpha + \beta)) = \sin(\alpha + \beta)$ volgens **(5)**,
en $\sin(\alpha + \beta) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}\sqrt{2} + \frac{1}{6}\sqrt{3}$.

16



b. $v_x = 20$; $v_y = 40 - 10t$; op $t = 0$ is $\vec{v} = (20, 40)$, dus hoek $= \text{2nd} \tan \frac{40}{20} \approx 63{,}4°$ en snelheid $= \sqrt{20^2 + 40^2} = 20\sqrt{5}$.
c. Dan is $v_y = 0$, dus $t = 4$, dit geeft het punt $(80, 80)$; snelheidsvector $= (20, 0)$.
d. $40t - 5t^2 = 0 \Leftrightarrow t = 0$ of $t = 8$, dus 8 sec; $x(8) = 160$; 160 m.
e. $\vec{v}(8) = (20, -40)$, dus de snelheid is $20\sqrt{5}$.

17 a.



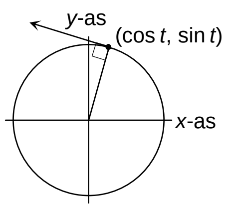
b. $80T\cdot\sin\alpha - 5T^2 = 0 \Leftrightarrow T(80\cdot\sin\alpha - 5T) = 0 \Leftrightarrow$ $T = 0$ of $T = 16\cdot\sin\alpha$, dus $T = 16\cdot\sin\alpha$.

c. $A = x(T) = 80T\cdot\cos\alpha = 80\cdot16\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha =$ $640\cdot\sin 2\alpha$ volgens **(16)**.
$640\cdot\sin 2\alpha$ is maximaal als $\sin 2\alpha$ maximaal is; dit is het geval als $\sin 2\alpha = 1$, dus als $\alpha = 45°$.

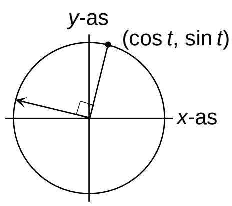
Paragraaf 5 De afgeleide van sinus en cosinus

1 a. De snelheidsvector is in A: $(0, 1)$; in B: $(-1, 0)$; in C: $(0, -1)$ en in D: $(1, 0)$
b. Je krijgt de grafiek van cos en van -sin.
d. sin' = cos en cos' = -sin.

2 a.



b.



Snelheidsvector is $(\cos(t + \frac{1}{2}\pi), \sin(t + \frac{1}{2}\pi))$; volgens **(10)** en **(11)** is dat: $(-\sin t, \cos t)$.

3 $u'(t) = -100\sin t$. De absolute waarde hiervan is de eerste keer 50 als $\sin t = \frac{1}{2}$ voor de eerste keer, dus $t = 0{,}52$.

4 • $y = \sin^2 x = \sin x \cdot \sin x$, met de productregel: dan $y' = \cos x \cdot \sin x + \sin x \cdot \cos x = 2\sin x \cdot \cos x$
of met de kettinregel: $x \to \sin x = u \to u^2$, dan $y' = 2u \cdot \cos x = 2\sin x \cdot \cos x$
• $y = \cos^2 x$, met productregel of kettingregel: $x \to \cos x = u \to u^2$, dan $y' = 2u \cdot -\sin x = -2\sin x \cdot \cos x$
• $y = x \cdot \sin x$, met de productregel: $y' = 1 \cdot \sin x + x \cdot \cos x$
• $y = x \cdot \sin^2 x$,met de productregel: $y' = 1 \cdot \sin^2 x + x \cdot 2\sin x \cdot \cos x =$ $\sin^2 x + 2x \cdot \sin x \cdot \cos x$
• $y = \dfrac{x}{\cos x}$, met de quotiëntregel:
$$y' = \frac{1 \cdot \cos x - x \cdot -\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos x + x \cdot \sin x}{\cos^2 x}$$
• $y = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, met de quotiëntregel:
$$y' = \frac{\cos x \cdot \cos x - -\sin x \cdot \sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

5 a. $\cos(\alpha+7)$ (met de kettringregel)
b. $\cos\alpha\cdot\cos 7 - \sin\alpha\cdot\sin 7$
(Opmerking: $\dfrac{d}{d\alpha}(\sin\alpha \cdot \cos 7) = \cos\alpha \cdot \cos 7$ volgens de veelvoudregel)
c. Formule **(12)**.

6 a. $(-6\sin 2t, 6\cos 2t)$
b. $\sqrt{36\cos^2 2t + 36\sin^2 2t} = \sqrt{36} = 6$
c. De hoeksnelheid is 2 rad/s , de straal van de baan is 3, dus snelheid = 2·3 = 6 eenheden per s of:
één rondje duurt π sec, de baan is een cirkel met straal 3, heeft dus lengte 6π, dus 6 eenh/sec.

7 a. De eenheidscirkel.
b. De ruimte tussen opvolgende punten van de baan die de GR met elkaar verbindt wordt steeds groter vanwege het kwadraat.
c. $121/2\pi \approx 19{,}26$, dus het kogeltje draait iets meer dan $19\frac{1}{4}$ rondje, komtdus 20 keer in het hoogste punt van de eenheidscirkel en 19 keer in het meest linkse punt.
d. Snelheidsvector $= (-2t\sin t^2, 2t\cos t^2) =$ $2t \cdot (-\sin t^2, \cos t^2)$. De grootte van $(-\sin t^2, \cos t^2)$ is 1,dus de snelheidsvector heeft grootte $2t$.
Anders: Na t seconden is t^2 eenheden afgelegd, de snelheid is dan $2t$.

8 b. $y = 0 \Leftrightarrow \sin x\cdot(\sin x + 1) = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0$ of $\sin x = -1 \Leftrightarrow x = 0, \pi, 1\frac{1}{2}\pi, 2\pi$
c. $y' = 2\sin x\cdot\cos x + \cos x = \cos x\,(2\sin x + 1)$
$y' = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0$ of $\sin x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\pi, 1\frac{1}{2}\pi, 1\frac{1}{6}\pi, 1\frac{5}{6}\pi$
d. Maximale waarde 2 voor $x = \frac{1}{2}\pi$, minimale waarde $-\frac{1}{4}$ voor $x = 1\frac{1}{6}\pi$, dus $[-\frac{1}{4}, 2]$
e. $y'(\pi) = -1$, dus 45°.

9 a. $f'(x) = 2\sin x \cdot \cos x = \sin 2x$ en $g'(x) = 2 \cdot \frac{1}{2}\sin 2x = \sin 2x$
b. De grafiek van de ene functie ontstaat uit de grafiek van de andere door een verticale verschuiving.
c. De functies verschillen een constante die je kunt vinden door voor x een getal in te vullen, bijvoorbeeld 0, $f(0) = 0$ en $g(0) = -\frac{1}{2}$. De functie f is

dus $\frac{1}{2}$ groter voor elke x, dus $f(x) = g(x) + \frac{1}{2}$, voor alle x.

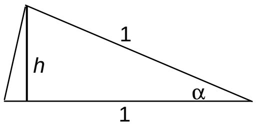
10 a. De helling van de lijn door $O(0,0)$ en het punt $(x, \sin x)$.

b. Dat is de groeisnelheid in $0 = \sin' 0 = \cos 0$.

c. $\cos(0) = 1$, dus $\dfrac{\sin x}{x} \approx 1$, dus $\sin(x) \approx x$.

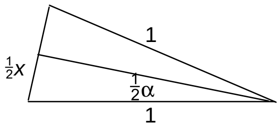
d. $\sin \frac{1}{2}x \approx \frac{1}{2}x$; $\sin\sqrt{x} \approx \sqrt{x}$

11 a. In het plaatje hiernaast is h een hoogtelijnstuk; $h = 1 \cdot \sin\alpha$.



Oppervlakte driehoek $= \frac{1}{2} \cdot \sin\alpha$.

Voor het berekenen van de derde zijde, zie het plaatje hiernaast.



$\frac{1}{2}x = 1 \cdot \sin\frac{1}{2}\alpha$, dus

$x = 2\sin\frac{1}{2}\alpha$

b. $\alpha = 30°$;

oppervlakte $= 12 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin 30° = 3$;

omtrek $= 12 \cdot 2 \cdot \sin 15° = 6{,}21$.

d. Oppervlakte $= \frac{1}{2} n \cdot \sin\frac{2\pi}{n} \approx \frac{1}{2} n \cdot \frac{2\pi}{n} = \pi$.

e. Omtrek $= 2n \cdot \sin\frac{\pi}{n} \approx 2n \cdot \frac{\pi}{n} = 2\pi$.

Rekentechniek

1 a. $\sin x = \sin\frac{1}{3}\pi \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}\pi$ of $x = \pi - \frac{1}{3}\pi = \frac{2}{3}\pi$

b. $\sin x = \sin(x+2) \Leftrightarrow x = x + 2 + k \cdot 2\pi$ of $x = \pi - (x+2) + k \cdot 2\pi \Leftrightarrow x = \pi - x - 2 + k \cdot 2\pi \Leftrightarrow$
$2x = \pi - 2 + k \cdot 2\pi \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\pi - 1 + k \cdot \pi$, dus $x = \frac{1}{2}\pi - 1$ of $x = 1\frac{1}{2}\pi - 1$

c. $\sin x = \sin 4x \Leftrightarrow x = 4x + k \cdot 2\pi$ of $x = \pi - 4x + k \cdot 2\pi$
$\Leftrightarrow x = k \cdot \frac{2}{3}\pi$ of $x = \frac{1}{5}\pi + k \cdot \frac{2}{5}\pi$. dit geeft:
$0, \frac{2}{3}\pi, 1\frac{1}{3}\pi, 2\pi, \frac{1}{5}\pi, \frac{3}{5}\pi, \pi, 1\frac{2}{5}\pi, 1\frac{4}{5}\pi$ tussen 0 en 2π.

d. $\sin x = -\sin x \Leftrightarrow \sin x = \sin -x \Leftrightarrow x = -x + k \cdot 2\pi$ of
$x = \pi - x + k \cdot 2\pi \Leftrightarrow 2x = k \cdot 2\pi$, dus $x = 0$, π, 2π

e. $\cos x = \cos\frac{1}{3}\pi \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$, dus $x = \frac{1}{3}\pi$, $1\frac{2}{3}\pi$

f. $\cos x = \cos(x+2) \Leftrightarrow x = \pm(x+2) + k \cdot 2\pi \Leftrightarrow$
$x = -x - 2 + k \cdot 2\pi \Leftrightarrow x = -1 + k \cdot \pi$, dus $x = \pi - 1$, $2\pi - 1$

g. $\cos x = \cos 4x \Leftrightarrow x = \pm 4x + k \cdot 2\pi \Leftrightarrow -3x = k \cdot 2\pi$ of $5x = k \cdot 2\pi$, dus $x = 0$, $\frac{2}{3}\pi$, $1\frac{1}{3}\pi$, 2π, $\frac{2}{5}\pi$, $\frac{4}{5}\pi$, $1\frac{1}{5}\pi$, $1\frac{3}{5}\pi$.

h. $\cos x = -\cos x \Leftrightarrow \cos x = \cos(x+\pi) \Leftrightarrow$
$x = \pm(x+\pi) + k \cdot 2\pi \Leftrightarrow x = -x - \pi + k \cdot 2\pi \Leftrightarrow$
$x = -\frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$, dus $x = \frac{1}{2}\pi$, $1\frac{1}{2}\pi$

i. $\sin x = \cos\frac{1}{3}\pi \Leftrightarrow \cos(\frac{1}{2}\pi - x) = \cos\frac{1}{3}\pi \Leftrightarrow$
$\frac{1}{2}\pi - x = \pm\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \Leftrightarrow x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$ of
$x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$, dus $x = \frac{1}{6}\pi$, $\frac{5}{6}\pi$

j. $\sin x = \cos x \Leftrightarrow \cos(\frac{1}{2}\pi - x) = \cos x \Leftrightarrow$
$\frac{1}{2}\pi - x = \pm x + k \cdot 2\pi \Leftrightarrow -2x = -\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \Leftrightarrow$
$x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \pi \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}\pi$, $1\frac{1}{4}\pi$

k. $\sin x = -\cos x \Leftrightarrow \sin -x = \cos x \Leftrightarrow$
$\cos(\frac{1}{2}\pi + x) = \cos x \Leftrightarrow \frac{1}{2}\pi + x = \pm x + k \cdot 2\pi \Leftrightarrow$
$2x = -\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \Leftrightarrow x = -\frac{1}{4}\pi + k \cdot \pi \Leftrightarrow x = \frac{3}{4}\pi$, $1\frac{3}{4}\pi$

l. $\sin x = \cos(2x) \Leftrightarrow \cos(\frac{1}{2}\pi - x) = \cos(2x) \Leftrightarrow$
$\frac{1}{2}\pi - x = \pm 2x + k \cdot 2\pi \Leftrightarrow -3x = -\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$ of
$x = -\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \Leftrightarrow x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$ of $x = -\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \Leftrightarrow$
$x = \frac{1}{6}\pi$, $\frac{5}{6}\pi$, $1\frac{1}{2}\pi$

2 a. $\sin x = \sin(3x - 2\frac{1}{4}\pi) \Leftrightarrow x = 3x - 2\frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi$ of $x = \pi - 3x + 2\frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi \Leftrightarrow -2x = -2\frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi$ of $4x = \pi + 2\frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi \Leftrightarrow x = 1\frac{1}{8}\pi + k \cdot \pi$ of $x = \frac{13}{16}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi$,
dus $x = \frac{1}{8}\pi$, $1\frac{1}{8}\pi$, $\frac{5}{16}\pi$, $\frac{13}{16}\pi$, $1\frac{5}{16}\pi$, $1\frac{13}{16}\pi$

b. $\cos(x + \frac{1}{4}\pi) = \cos(2x - 1\frac{1}{4}\pi) \Leftrightarrow x + \frac{1}{4}\pi =$
$\pm(2x - 1\frac{1}{4}\pi) + k \cdot 2\pi \Leftrightarrow -x = -1\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$ of
$3x = \pi + k \cdot 2\pi \Leftrightarrow x = 1\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$ of $x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$, dus
$x = \frac{1}{3}\pi$, π, $1\frac{2}{3}\pi$, $1\frac{1}{2}\pi$

c. $\sin(x - \frac{5}{6}\pi) = \cos x \Leftrightarrow \cos(1\frac{1}{3}\pi - x) = \cos x \Leftrightarrow$
$1\frac{1}{3}\pi - x = \pm x + k \cdot 2\pi \Leftrightarrow -2x = -1\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi \Leftrightarrow$
$x = \frac{2}{3}\pi + k \cdot \pi$, dus $x = \frac{2}{3}\pi$, $1\frac{2}{3}\pi$

d. $\sin x = -\cos\frac{1}{7}\pi \Leftrightarrow \cos(\frac{1}{2}\pi - x) = \cos 1\frac{1}{7}\pi \Leftrightarrow$
$\frac{1}{2}\pi - x = \pm 1\frac{1}{7}\pi + k \cdot 2\pi \Leftrightarrow x = -\frac{9}{14}\pi + k \cdot 2\pi$ of
$x = 1\frac{9}{14}\pi + k \cdot 2\pi$, dus $x = 1\frac{5}{14}\pi$, $1\frac{9}{14}\pi$

e. $\sin(x + \frac{1}{4}\pi) = -\cos x \Leftrightarrow \cos(\frac{1}{4}\pi - x) = \cos(x + \pi)$
$\Leftrightarrow \frac{1}{4}\pi - x = \pm(x + \pi) + k \cdot 2\pi \Leftrightarrow -2x = \frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi \Leftrightarrow$
$x = -\frac{3}{8}\pi + k \cdot 2\pi$, dus $x = \frac{5}{8}\pi$, $1\frac{5}{8}\pi$

f. $\sin 2x = \cos 3x \Leftrightarrow \cos(\frac{1}{2}\pi - 2x) = \cos 3x \Leftrightarrow$
$\frac{1}{2}\pi - 2x = \pm 3x + k \cdot 2\pi \Leftrightarrow -5x = -\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$ of
$x = -\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi \Leftrightarrow x = \frac{1}{10}\pi + k \cdot \frac{2}{5}\pi$ of $x = 1\frac{1}{2}\pi$, dus
$x = \frac{1}{10}\pi$, $\frac{1}{2}\pi$, $\frac{9}{10}\pi$, $1\frac{3}{10}\pi$, $1\frac{1}{2}\pi$, $1\frac{7}{10}\pi$

3 a. $\cos^2 x + \sin x = 1$ $k \cdot \pi, \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$

b. $\cos 2x + \cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow 2\cos^2 x - 1 + \cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow 2\cos^2 x + \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x(2\cos x + 1) = 0 \Leftrightarrow$
$\cos x = 0$ of $\cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow$
$x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi, \frac{2}{3}\pi + k \cdot 2\pi, \frac{4}{3}\pi + k \cdot 2\pi$

c. $3\sin x + \cos^2 x = 3 \Leftrightarrow 3\sin x + 1 - \sin^2 x = 3 \Leftrightarrow$
$\sin^2 x - 3\sin x + 2 = 0 \Leftrightarrow (\sin x - 2)(\sin x - 1) = 0 \Leftrightarrow$
$\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$

d. $\cos 2x = 1 - \sin x \Leftrightarrow 1 - 2\sin^2 x = 1 - \sin x \Leftrightarrow$
$\sin x(2\sin x - 1) = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0$ of $\sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$
$x = k \cdot \pi, \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi, \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$

4 a.
$$\frac{\sin\left(x + \frac{1}{3}\pi\right)}{\sin\left(x - \frac{1}{3}\pi\right)} = \frac{\sin x \cdot \cos\frac{1}{3}\pi + \cos x \cdot \sin\frac{1}{3}\pi}{\sin x \cdot \cos\frac{1}{3}\pi - \cos x \cdot \sin\frac{1}{3}\pi}$$
$$= \frac{\frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{2}\sqrt{3}\cos x}{\frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{2}\sqrt{3}\cos x} = \frac{\sin x + \sqrt{3}\cos x}{\sin x - \sqrt{3}\cos x}$$

b.
$$\frac{(\sin x + \cos x)^2}{(\sin x - \cos x)^2} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cdot \cos x}{\sin^2 x + \cos^2 x - 2\sin x \cdot \cos x}$$
$$= \frac{1 + \sin 2x}{1 - \sin 2x}$$

c. $\dfrac{\cos 2x}{\sin x + \cos x} = \dfrac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x + \cos x} =$

$\dfrac{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}{\sin x + \cos x} = \cos\ x - \sin x$

d. $\dfrac{\cos 2x}{\cos x} = \dfrac{2\cos^2 x - 1}{\cos x} = 2\cos x - \dfrac{1}{\cos x}$

e. $\dfrac{\cos 2\left(x - \frac{1}{4}\pi\right)}{\cos\left(x - \frac{1}{2}\pi\right)} = \dfrac{\cos\left(2x - \frac{1}{2}\pi\right)}{\cos\left(x - \frac{1}{2}\pi\right)} = \dfrac{\sin 2x}{\sin x}$

$= \dfrac{2 \cdot \sin x \cdot \cos x}{\sin x} = 2 \cdot \cos x$

5 **a.** $(\sin x + \cos x)^2 = 1 + \cos x \Leftrightarrow$
$\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x\ \cdot \cos x = 1 + \cos x \Leftrightarrow$
$2\sin x\ \cdot \cos x = \cos x \Leftrightarrow \cos x = 0$ of $\sin x = \frac{1}{2}$
$\Leftrightarrow\ x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$ of $x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$ of
$x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$

b. $2\cos^2 x + \sin 2x = 0 \Leftrightarrow 2\cos^2 x + 2\sin x\ \cdot \cos x = 0$
$\Leftrightarrow \cos x = 0$ of $\cos x = \text{-}\sin x$
$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$ of $x = \text{-}\frac{1}{4}\pi + k \cdot \pi$

c. $2\sin^2 x = 1 - \cos(x + \frac{1}{4}\pi) \Leftrightarrow$
$2\sin^2 x - 1 = \text{-}\cos(x + \frac{1}{4}\pi)\ \ \Leftrightarrow\ \ \text{-}\cos 2x = \text{-}\cos(x + \frac{1}{4}\pi)$
$\Leftrightarrow 2x = \pm(x + \frac{1}{4}\pi) + k \cdot 2\pi \Leftrightarrow$
$x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi$ of $3x = \text{-}\frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi \Leftrightarrow$
$x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot 2\pi$ of $x = \text{-}\frac{1}{12}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$

d. $4\sin^3 x = 3\sin 2x \Leftrightarrow 4\sin^3 x = 3 \cdot 2\sin x \cdot \cos x \Leftrightarrow$
$\sin x = 0$ of $4\sin^2 x = 6\cos x \Leftrightarrow x = k \cdot \pi$ of
$4 - 4\cos^2 x = 6\cos x \Leftrightarrow$
$x = k \cdot \pi$ of $(\cos x + 2)(2\cos x - 1) = 0 \Leftrightarrow$
$x = k \cdot \pi$ of $x = \pm\frac{1}{3}\pi + k \cdot 2\pi$.

e. $\cos(x + \frac{1}{4}\pi) \cdot \cos(x - \frac{1}{4}\pi) = \sin x \cdot \cos x \Leftrightarrow$
$(\cos x \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} - \sin x \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2})(\cos x \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} + \sin x \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2})$
$= \sin x \cdot \cos x \Leftrightarrow \cos^2 x - \sin^2 x = 2\sin x \cdot \cos x \Leftrightarrow$
$\cos 2x = \sin 2x \Leftrightarrow\ \ x = \frac{1}{8}\pi + k \cdot \frac{1}{2}\pi$

6 **a.** $\cos^4 x - \sin^4 x = (\cos^2 x - \sin^2 x) \cdot (\cos^2 x + \sin^2 x) =$
$(\cos^2 x - \sin^2 x) \cdot 1 = \cos^2 x - \sin^2 x$

b. $\sin^6 x + 3\sin^2 x\cos^2 x + \cos^6 x =$
$\sin^6 x + 3\sin^2 x(1 - \sin^2 x) + (1 - \sin^2 x)^3 =$
$\sin^6 x + 3\sin^2 x - 3\sin^4 x + 1 - 3\sin^2 x + 3\sin^4 x - \sin^6 x$
$= 1$

c. $\sin(x + y)\sin(x - y) =$
$(\sin x\cos y + \cos x\sin y)(\sin x\cos y - \cos x\sin y) =$
$\sin^2 x\cos^2 y - \cos^2 x\sin^2 y =$
$(1 - \cos^2 x)\cos^2 y - \cos^2 x(1 - \cos^2 y) =$
$\cos^2 y - \cos^2 x \cdot \cos^2 y - \cos^2 x + \cos^2 x \cdot \cos^2 y =$
$\cos^2 y - \cos^2 x$, dus
$\cos^2 y - \sin(x + y)\sin(x - y) - \cos^2 x = 0$